Числові ряди:

1. Користуючись достатньою ознакою розбіжності ряду з'ясувати поведінку рядів:

   а) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \cdot \sin\frac{2n}{3n^4+1}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-1}{4n+2}\right)^n$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{4n^4+3n^2+n}-2n^2\right)$.

2. Дослідити ряди на збіжність, використовуючи інтегральну ознаку Коші: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(n+5)\ln^3(2n+1)}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{3n+1}}$.

3. Дослідити на збіжність ряди за допомогою ознак порівняння:

   а) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{n^3}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)}{n}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+2^n}$.

4. Дослідити на збіжність ряди за допомогою радикальної ознаки Коші:

   а) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n\left(\frac{2n^3}{n^3+1}\right)$, б) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{5n+1}{3n-4}\right)^n$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}$.

5. Дослідити на збіжність ряди за допомогою ознаки Д'Аламбера:

   а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^2\cdot 5^n}{(n+3)\cdot 4^{2n}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n\cdot n!}{3^n}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!!}$.

6. Дослідити знакозмінні ряди на збіжність:

   а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos\frac{1}{n}}{n^2}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln^2(n+3)}{n+1}$, в) $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n n\cdot\arcsin\left(\frac{3}{n+1}\right)$.

Завдання: дослідити ряди на збіжність

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(3n+1)\cdot\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+2n+5}{3n^2+n+1}\right)^n$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^7+7n+3}-\sqrt{n^7+2n+1}\right)$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{2n^2+5n}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\cdot\left(\frac{n^2+4}{2n^2+3}\right)^n$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+4}{n^2-2n+3}\right)^{n^2}$.

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+3)!}{n!\cdot 4^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\sqrt{n}\cdot\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-1\right)$, б) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln(n+2)}$.

Степеневі ряди:

1. Знайти область збіжності степеневого ряда та вказати радіус збіжності
   а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+1)^{2n}(3n+1)}{4^n\cdot n^2}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{3^n\cdot\sqrt{2n+1}}$, в)
2. Розкласти функцію $\frac{1}{x-2}$ за степенями $(x-3)$, вказати область збіжності.
3. Розкласти функцію $\cos^2 x$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.
4. Розкласти функцію $\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.
5. Розкласти функцію $\ln(1-4x^2)$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

Застосування степеневих рядів:

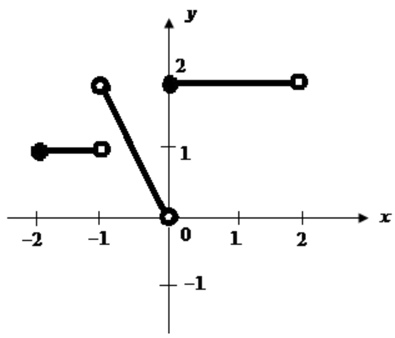
1. Використовуючи розклад в ряд Маклорена підінтегральної функції, обчислити інтеграл $\int_0^{5/2}\frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}$ з точністю до $\varepsilon=10^{-3}$.
2. Використовуючи розклад в ряд Маклорена підінтегральної функції, обчислити інтеграл $\int_0^{0,2} x^2\cdot e^{-x}\,dx$ з точністю до $\varepsilon=10^{-3}$.
3. Знайти п’ять перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд частинного розв’язку диференціального рівняння:
   а) $y'=x+x^2+y^2,\quad y(0)=1$, б) $x\cdot y'+y=y\ln x,\quad y(1)=1$,
   в) $y''=y\cdot y'-x^2,\quad y(0)=1,\ y'(0)=1$.
4. Знайти п’ять перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд частинного розв’язку диференціального рівняння:
   а) $y'=y\cdot x^2+y^2,\quad y(0)=2$, б) $y''-xy+e^x=2,\quad y(1)=1,\ y'(1)=2$.

Ряди Фур’є:

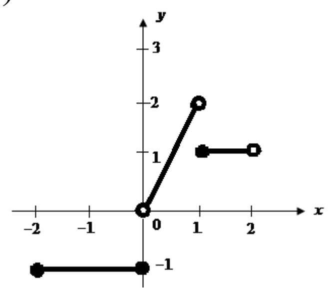
1. Розвинути функцію в ряд Фур’є $f(x)=3x+1$ на інтервалі $x\in(-\pi;\pi)$.
2. Розвинути функцію $f(x)=\frac{x}{2}-1$ в ряд Фур’є за синусами на інтервалі $x\in(0;4)$.
3. Розвинути функцію $f(x)=\frac{\pi}{2}-x$ в ряд Фур’є за косинусами на інтервалі $x\in(0;\pi)$.
4. Розвинути функцію в ряд Фур’є $f(x)=\begin{cases}2x, & x\in(-3;0)\\ 1, & x\in(0;3]\end{cases}$

5. Розвинути в ряд Фур'є на інтервалі $(-2; 2)$ функцію $y = f(x)$, задану графічно:

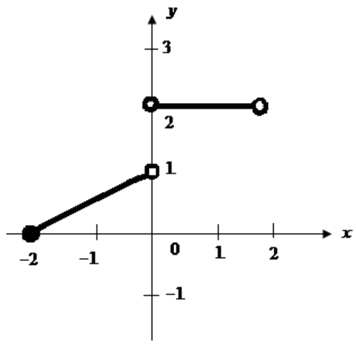
а)



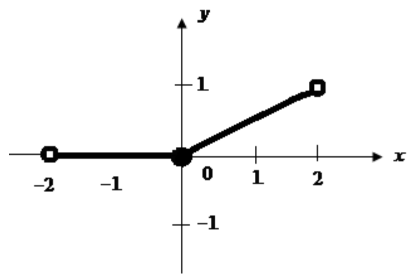
б)



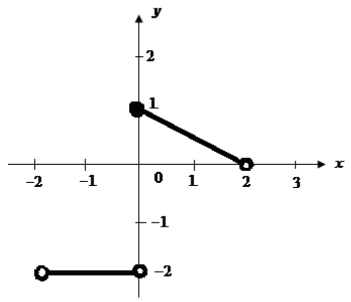
в)



г)



д)



е)